Kvantovaná ekonomie

Jiří Mihola
Vysoká škola finanční a správní Praha, výstup pro IGU 7736, jiri.mihola@quick.cz;
Milan Vlach
Fakulta matematiky a fyziky Karlovy Univerzity Praha, milan.vlach@mff.cuni.cz

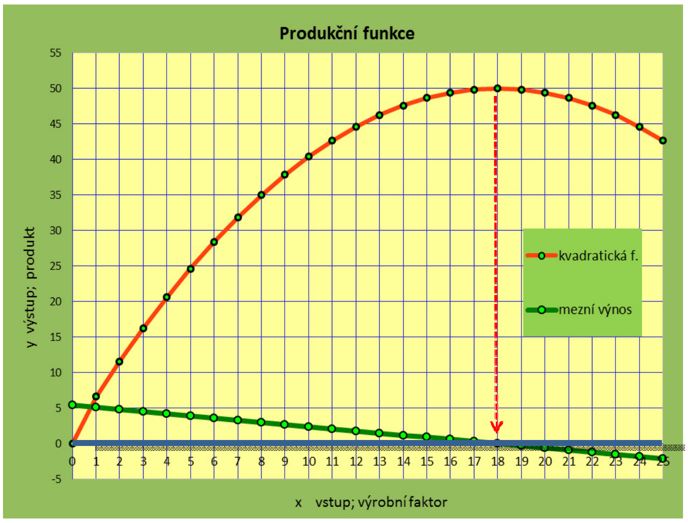
Ekonomie se zabývá účelným a efektivním lidským jednáním ve světě omezených zdrojů a rostoucích potřeb. Úkolem ekonomie není stanovovat cíle rozvoje společnosti, nýbrž optimalizovat trajektorie dosažení těchto společenských cílů z hlediska její efektivnosti a účelnosti.
Vzhledem k tomu, že se ekonomie zabývá vymezováním pojmů, měřením a vyjadřováním vzájemných vztahů mezi těmito veličinami, používá matematický aparát umožňující vytvářet abstraktní modely reality. Tyto modely umožňují v rámci své vypovídací schopnosti jak popis nějakého komplexního souboru vztahů, tak experimentování a predikci.
Přesto, že se v ekonomii měří téměř výhradně diskrétně, tj. veličiny jsou vztaženy na výrobek, firmu, den, rok apod. vyjadřují se vzájemné vztahy většinou spojitými hladkými funkcemi[1] . Například produkční funkce vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů jako konkávní funkci závislosti produktu (výstupu) na výrobních faktorech (vstupech) se dá vyjádřit jako spojitá kvadratická funkce reálné proměnné. Tím nepřímo předpokládáme, že daný výrobní faktor (vstup) lze dávkovat libovolným způsobem stejně tak jako výstupy. Pokud budeme zvažovat pro zjednodušení pouze jediný souhrnný výstup y a jediný souhrnný vstup x může být taková spojitá funkce určena například výrazem

$$y = f(x) \tag{1}$$

konkrétně např.

$$y = a-b.(x-c)^2 \tag{2}$$

obrázek č. 1



Na ilustračním obrázku č. 1 je nakreslena funkce:

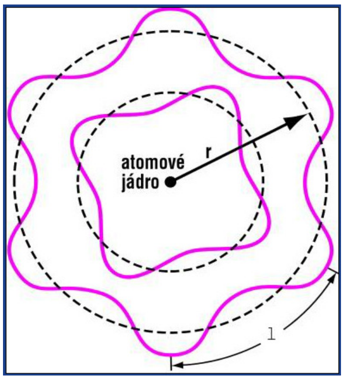
$$y = 50-0,15.(x-18)^2 \tag{3}$$

Tato funkce velmi dobře zobrazuje skutečnost, že širší využití daného výrobního faktoru (dále jen VF) přináší sice další růst produktu, avšak tento růst je stále pomalejší tj. mezní výnos je klesající (zeleně). Tento pokles vede až k zastavení růstu produktu. Mezní výnos je v bodě maximální hodnoty produkční funkce nulový. Další navyšování faktoru by vedlo již k poklesu[2] produktu. V praxi je obvykle snadné takové situaci zabránit tím, že produkt v takové míře již nepoužíváme (například je-li VF voda, omezíme zálivku). V našem případě klesá mezní produkt lineárně. Jeho průběh je dán derivací funkce (3)

$$y' = 0,3.(18-x) \tag{4}$$

Takovéto vyjádření produkční funkce je sice názorné a jednoduché, avšak v určitých případech neodpovídá realitě dostatečně. VF obvykle nelze navyšovat plynule a většinou je možno získat nějakou produkci až při využití určitého minimálního množství[3] daného VF. Na to abychom mohli tyto skutečnosti vzít v úvahu, musíme respektovat, že obvykle až určité minimální množství daného VF přináší nějakou produkci. Například rostlina vyžaduje určitou minimální zálivku, aby se objevila alespoň nějaké úroda, hospodářská zvířata vyžadují alespoň minimální výživu, na výrobu automobilu je zapotřebí určité množství materiálu apod. Pokud budeme pěstovat více rostlin, budeme potřebovat násobné množství VF, který nám bude přibývat po určitých množstvích tzv. kvantech. Rovněž VF i produkt má vždy nějaké minimální kvantum. Například vody nemohu použít méně než jednu molekulu podobně jako půdy. Velmi malé je také minimální kvantum elektrické energie apod. Tato kvanta jsou v ekonomii vesměs pod její praktickou rozlišovací úroveň. Pokud jsou tato minimální kvanta makroskopická a nedělitelná jako hospodářská zvířata, zaměstnanci nebo budovy, měli bychom je respektovat.
Je to podobné jako v kvantové teorii, která popisuje mikrofyzikální procesy. V oblastech přírody, které jsou dostupné smyslovému vnímání, se jeví většina dějů spojitě, neboť se na nich podílí obrovský počet různých atomů a procesů v nich. Ve skutečnosti však procesy probíhají v jednotlivých atomech, a tedy skokem. V atomu existuje jen určitý počet stabilních stavů elektronů při jejich pohybu kolem atomového jádra. Systémy, které jsou charakterizovány určitými diskrétními číselnými hodnotami (kvantová čísla), se nazývají kvantované. Kvantově mechanická povaha hmoty, která byla dlouho mimo naší pozornost, se projevuje už ve velmi malých rozměrech. To souvisí s velmi malou hodnotou Plankovi konstanty[4] h = 6,63.10-34 Js. Pouze v případě, že neuvažujeme se zrnitostí prostoru a času můžeme používat diferenciální rovnice a svět tak představuje kontinum i v nejmenších myslitelných rozměrech.

Schematicky, zato názorně, ukazuje existenci stabilních drah obrázek č. 2.

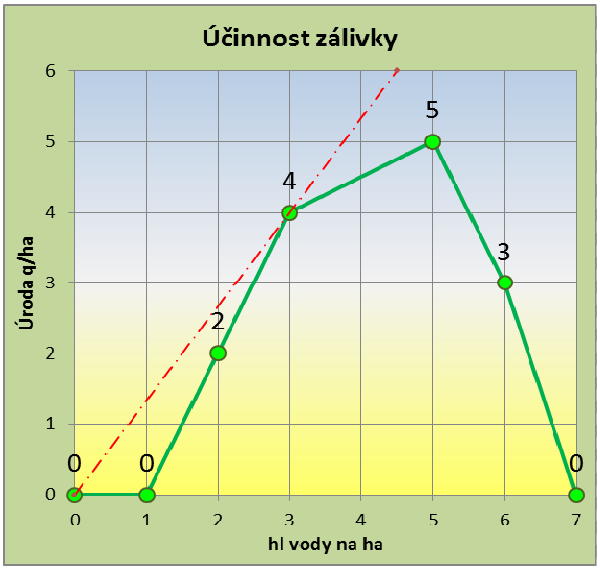


Kvantová teorie je prakticky v každém ohledu[5] protikladem Einsteinovy obecné teorie relativity, která pokrývá velké rozměry a je spojena s hladkými a spojitými funkcemi časoprostoru[6] . V obou těchto teoriích se ale objevují potíže s bezrozměrnými (bodovými) objekty (singularitami)[7] jako jsou elementární částice hmoty jejich složky jako elektrony a kvarky nebo např. černé díry. Tyto potíže se snaží překonat při spojení obecné teorie relativity a kvantové teorie tzv. teorie strun, která přišla s myšlenkou, že nejde o bodové objekty nýbrž nepatrné vibrující uzavřené struny[8].
Ekonomické modely mohou narazit na obdobné problémy jako fyzika. V praxi i v teorii se často vyskytují situace, kdy k dosažení určitého cíle vede více cest, které představují tzv. přípustná řešení, zatímco ta nejlepší cesta, která může být jedna nebo je jich více, se nazývá optimální řešení. Někdy není optimální řešení žádné. Přípustná řešení, jež nejsou optimální, se též nazývají suboptimální. Jestliže má úloha optimální řešení, pak je každé její suboptimální řešení zatíženo nějakou ztrátou, a to bez ohledu na to, zda má úloha jediné optimální řešení nebo zda má optimálních řešení více.
Příkladem optimalizační úlohy je také alokace vody z omezeného zdroje. Předpokládejme, že 3 farmáři mají k dispozici omezené množství vody pro zavlažování svých plantáží a že množství použité vody má vliv na dosaženou úrodu. Pokud si tento vodní zdroj, jehož celková kapacita odpovídá jejich úhrnné potřebě, rozdělí v určitém předem známém poměru (např. podle rozlohy pozemků), dosáhnou v daném období v souhrnu maximální úrodu. Pokud si vodu rozdělí (alokují) jinak, bude úroda jednoho či dvou z nich menší než při optimální alokaci. Každá suboptimální alokace sníží součet sklizní všech tří farmářů. To ovšem nevylučuje, že

při suboptimální alokaci vody nebude mít jeden či dva farmáři úrodu vyšší, než při optimální alokaci vody. Ukázalo se, že různá suboptimální (přípustná) řešení alokace vody se od sebe navzájem liší a vyznačuje se různými smysluplnými interpretacemi. Naším úkolem je nalézt matematický aparát pro vyjádření všech těchto suboptimálních řešení a tato zmapovat.

Výchozí informace pro ekonomické úvahy jsou fakta o objektu našeho zájmu například o rostlinách, které budeme pěstovat. Pro zachycení vztahu mezi úrodou a potřebným množstvím vody na zálivku není vhodné používat běžnou produkční funkcí, neboť je účelné aby tato funkce nebyla závislá na obhospodařovaných plochách. Botanický či agrotechnický výzkumný ústav vztáhne výsledky na jednotku ploch např. ha či m^2. Vyjdeme z ilustrativního příkladu, v němž byly v grafu č. 1 účinnosti zálivky naměřeny například následující hodnoty.

Graf č. 1



Bod [1,0] představuje minimální zálivku. Bod [3,4] se vyznačuje nejlepším využitím jednotkového množství vody. Účinnost zalévání je zde dána poměrem.

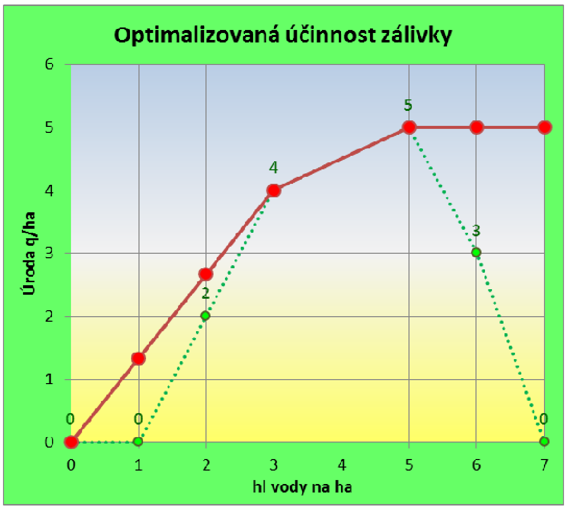
$$u = \frac{y/G}{x/G} = \frac{4}{3} \tag{4}$$

kde u je účinnost zálivky; y je úroda v našem případě 24 q; x je množství použité vody, v našem případě18 hl a G je rozloha zkušebních pozemků, v našem případě např. 6 ha. V bodě [5,5] je sice největší úroda, zato účinnost zálivky klesla na 1 (x = 30 hl; y = 30 q). V bodech s větším množstvím použité vody na ha tj. nad 5 hl/ha již dochází při nadbytečné zálivce, a tím k poklesu úrody pod 1 q/ha.

Hospodář optimalizující svou úrodu se snadno vyvaruje klesající úrody tím, že i při dostatku vody nepoužije na ha více vody než 5 hl/q. Pokud má méně vody a nemůže na ha použít 5 hl, při kterých má úrodu největší, bude se při menší a přitom rovnoměrné zálivce úměrně snižovat výnos až při 3 hl/ha klesne úroda na 4 q/ha. V tomto bodě je každý hl vody nejlépe využit, protože dává maximální účinnost 4/3 q/hl. Při rovnoměrné zálivce všech polností bude lineárně klesat i úroda až do minimální zálivky, při které je úroda nulová.

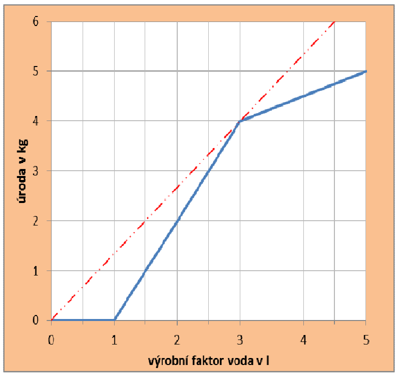
Avšak pokud v oblasti bodů [0,0] až [3,4] použijeme nerovnoměrnou zálivku tak, že zalijeme maximum rostlin tak jako v bodě [3,4] dosáhneme v této oblasti trvale účinnost 4/3 tj. budeme se pohybovat po spojnici bodů [0,0] a [3,4]. Například v bodě [1,0] nám při rovnoměrné zálivce více rostlin, již vychází na jednu rostlinu méně než 1 hl/ha. Celkově je vody dostatek na efektivní zalití, alespoň některých rostlin. Pokud takto získanou úrodu přepočítáme na 1 ha, zjistíme, že na ha získáme úrodu 1,333, což odpovídá účinnosti zálivky 4/3. Touto optimalizací se nám promění graf č. 1 na graf č. 2, který je již plně konkávní.

Graf č. 2

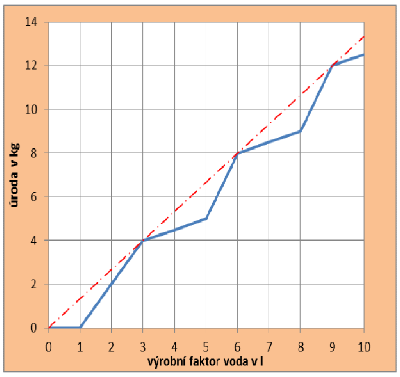


Rovněž tento graf představuje určité zjednodušení neboť červená úsečka procházející počátkem souřadnic tj. bodem [0,0] by znamenala, že úroda se objevuje již při sebemenší zálivce a to není pravda. Tyto nereálnosti odstraníme, pokud graf č. 1 vztáhneme pouze na jednu rostlinu. Spotřebovanou vodu pak budeme měřit např. v l za vegetační období a úrodu např. v kg (řekněme, že jde o melouny). Následující grafy č. 3 až 8 ukazují, jak vypadá graf funkce účinnosti, který je současně produkční funkcí pro 5; 10; 35; 100 a 1000 l což odpovídá 1; 3; 11; 33 či 333 rostlinám. Tyto grafy respektují minimální kvantum pěstování plodin, kterým je jedna rostlina. Každá rostlina potřebuje k svému vývoji nějakou minimální rozlohu půdy a minimální množství dalších faktorů.

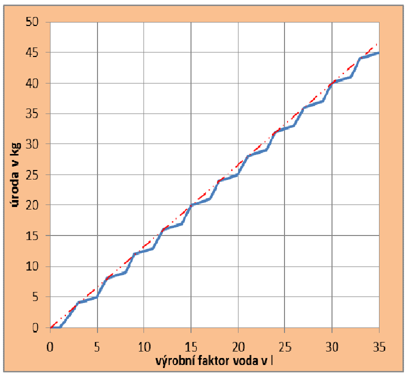
Graf č. 3



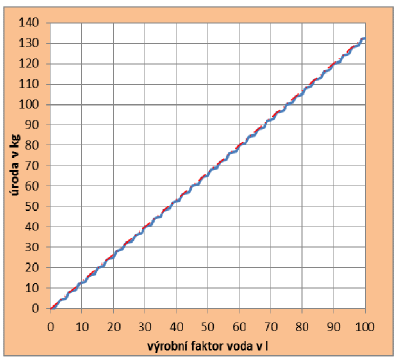
Graf č. 4



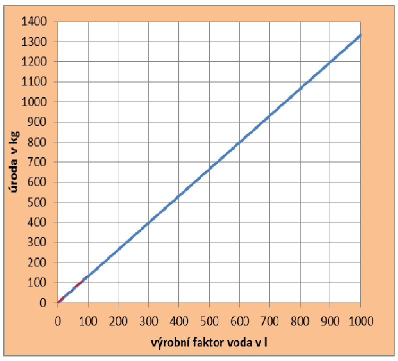
Graf č. 5



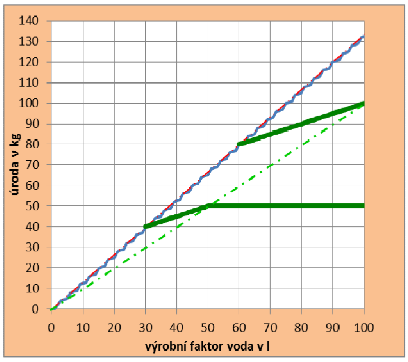
Graf č. 6



Graf č. 7



Graf č. 8



Grafy ilustrují tu skutečnost, že jakmile máme k dispozici více jak 5 l vody, můžeme využít další rostlinu takže při 6 l jsme opět v situaci s maximální účinností 4/3. Při dispozičních 8 l vody můžeme zapojit i třetí rostlinu. To můžeme učinit vždy, když máme k dispozici další 3 litry vody. Výsledkem je lomená čára, která vždy respektuje minimální zálivku pro jednu rostlinu. Při přibývajícím počtu rostlin odpovídajících rostoucímu množství vody je vlnitý charakter spojité avšak lomené křivky již málo patrný. Po velký počet rostlin pak můžeme tuto funkci aproximovat přímkou procházející počátkem. Všechny body pak budou mít stejnou účinnost, v našem případě 4/3.

Pokud budeme chtít nakreslit produkční funkci pro určitý počet rostlin daný například určitým omezením využívané rozlohy pozemků, můžeme si takový bod vyznačit na jednom z uvedených grafů s vhodným měřítkem. Na grafu č. 8 je taková funkce nakreslená pro 10 a 20 rostlin. Pokud dále zvyšujeme zálivku roste produkce až do bodu [50,50]. Dále se již produkce s větším množstvím vody zvyšovat nebude, neboť by již klesala účinnost. Tyto body maximální úrody pro určité počty rostlin leží na čerchované přímce rovněž zakreslené na grafu č. 8. Tato produkční funkce se již podle očekávání podobá produkční funkci na grafu č. 2 s tím rozdílem, že v grafu č. 8 jde ve skutečnosti o lomenou čáru, která respektuje minimální zálivku jedné rostliny.

Lomená křivka na grafech č. 1 až 5 sice respektuje jednotlivé rostliny, avšak na ty se díváme prozatím jako na homogení objekty. Je však velmi pravděpodobné, že např. zálivka se týká především kořenového systému nebo listů, a tak by mohla vést k podobnému zvlnění produkčních křivek, avšak o jednu hierarchickou strukturu níž. K tomu bychom potřebovali odpovídající analogický graf ke grafu č. 1. To se pravděpodobně bude opakovat i na další nižší úrovni např. v rámci buněčné struktury rostliny. Pokud zde nalezneme obdobné procesy vyznačující se kvanty na hlubší úrovni živé případně neživé hmoty, které si budou podobné, máme zde základ pro odhalení a konkretizaci její fraktální povahy.

Uvedené poznatky a způsoby vyjadřování produkční funkce respektující jednu rostlinu jako základní kvantum můžeme použít při řešení úlohy optimální alokace vody ve farmářské úloze.

Vysvětlivky:

[1] Správně bychom tedy měli pracovat s diferenčními rovnicemi, kde definičním oborem diference je tzv. diskrétní množina ekvidistantních bodů (x_0 + nh), kde x_0 je dané číslo, n = 1, 2, 3, …. A h > 0 je libovolné číslo, zvané diferenční krok.
[2] Pokud bude tímto výrobním faktorem při pěstování rostlin voda, představuje absolutní pokles produktu, kterou je úroda těchto rostlin, tak solná zálivka, která již rostlinám škodí, např. uhnívají.
[3] Pokud neuvažujeme minimální množství VF, nabývají veličiny spojitých funkcí v oblasti počátku souřadnic těžko interpretovatelných hodnot jako je maximální efektivnost apod.
[4] Bais (2009) s. 72 a 73.
[5] Seife (2005), udává na s. 220. *Vesmír obecné teorie relativity je spojitý, nemá žádné hrany ani hroty. Kvantová mechanika na druhé straně popisuje vesmír jako roztrhaný a přetržitý.*
[6] Kaku (1994), s.111
[7] Seife (2005), s.222 a 223
[8] Livio (2009), s.188 nebo Seife (2005), s.224

Literatura:

Bais, S.: ROVNICE-Symboly poznání. Jan Obdržálek. Dokořán, Praha, 2009, 95 s., ISBN 978-80-7363-228-1
Barrow, J. D.: Nové teorie všeho. Jan Novotný. Dokořán, Praha, 2008, 271 s., ISBN 978-80-7363-186-4
Kindersley, D.: Vesmír - obrazová encyklopedie. Knižní klub, Praha 2006
Kaku, M.: Hyperprostor. Argo/Dokořán, 2008, ISBN 978-80-7363-193-2, ISBN 978-80-257-0013-6
Kleczek, J.: Velká encyklopedie vesmíru. Academie, Praha 2002
Kolman, V.: Filozofie čísla, AV ČR, FILOSOFIA, Praha 2008, 670 s., ISBN 978-80-7007-279-0
Livio, M.: Je bůh matematik? Argo/Dokořán, 2009, ISBN 978-80-7363-282-3, ISBN 978-80-257-0278-9
Mareš, M.: Příběhy matematiky stručná historie královny věd, Pistórius & Olšanská, Praha 2008, 336 s., ISBN 978-80-87053-16-4
Mihola, J.: Cestování po redistribuční krajině. Teoretický seminář VŠFS prosinec 2009, 52 s.
Mihola, J.: Filozofie a matematika rub a líc astronomie. Mezinárodní konference Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí. Úpice 16. – 18. 5. 2006

Mihola, J.: Inverzní astronomie. Mezinárodní konference Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí. Úpice 22. – 24. 5 .2007
Mihola, J.: Socio-psychologické aspekty dosažení konsensuálního bodu, Vědecká konference VŠFS, Praha 13. 10. 2009, 27 s.
Mihola, J.: Proč je vesmír zakřivený a nesymetrický? Mezinárodní konference Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí. Úpice 18. – 20. 5. 2010
Mihola, J.: Příčiny pomalého vývoje pozemské civilizace a náměty na řešení Mezinárodní konference Člověk ve svém pozemském a kosmickém prostředí. Úpice 17. – 19. 5. 2011
Mihola, J., Vlach, V.: Cooperative solutions to simple distribution problem, The XIV. International Scientific Conference Huma Capital and Investment in Education, VŠFS. Praha, 16.9.2011
Mihola, J., Vlach, V.: Game Theoretic Models of Distribution Systems. 14 Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Marking under Uncertainty, 18 až 21.9.2011, Hejnice
Nágel, E., Newman, J.R.: Gödelův důkaz, VÚT Brno VUTIUM, Brno 2006, 126 s., ISBN 80-214-3174-1
Punčochář , M.: Nedaleko nekonečna. ACADEMIA, 2004, ISBN 80-200-1203-6
Příhoda, P.: 2007, Astronomický kurz. Přednášky. Planetárium
Seife, Ch.: Nula Životopis jedné nebezpečné myšlenky, Dokořán a Argo, Praha 2005,263 s., ISBN 80-7363-048-6
Valenčík, R., Teorie her a redistribuční systémy, VŠFS EUPRESS, Praha 2008,124 s., ISBN 978-80-7408-002-9

prezentace: Kvantová ekonomie K