

## ANALÝZA SRÁŽKOVÝCH MAXIM

*Marie Budíková, Ladislav Budík*

---

### Summary

Analysis of precipitation maxima

Database of daily maxima precipitation in a year was completed in our institute in southern Moravia. We choose 33 year maxima series in years 1933-2002 (pic.1). They were analysed using record theory. All 33 serieses were in good agreement with theory with exception of last 10 years, during which number of records rose up. This is against theory. Pic.8 shows record number during 70 years on 33stations. Pic. 9 shows number of records in each year in all stationes and on the pic.10 is cumulative frequency of records in all stations.

Then we tried to use moving records with ten years computing window. In 70 years long series it would be 198 records. Average number of records was 197, but for each series it was between 177 and 224. There is something out of chance. After some analyse we asumed, that series of moving records looks like pile. If number of records is higher then 198, series looks more like pile the higher number of moving records is. Pile is oriented to the right. If number of moving records is lower then 198, series looks more like pile the lover number of moving records is. Pile is then oriented to the left. If number of moving records is about 198 then series looks chaotic. Examples are on pic. 13 -16. Pic.17 shows backwards series Valtice. From this follows that series of year daily precipitation maxima is not so chaotic we supposed till now. In following paper we tried to solve this conclusion. At 12th and 13th pictures we can see number of records in map of sothern Moravia.

We analysed also moving records as one average series of the all 33 series. Such series has periodic character (pic.18). It is not much chaotic.

Above mentioned results are also described in [2].

---

### Úvod

V letech 1997 a 2002 byla značná část naší republiky postižena katastrofálními povodněmi. Byly zapříčiněny dlouhotrvajícími vydatnými dešti. Takové extrémní situace jsou vždy sledovány se zájmem (v tomto případě samozřejmě i s obavami). V rámci matematické statistiky dokonce existuje odvětví zvané teorie rekordů, které se zabývá zkoumáním extrémních situací. V našem příspěvku bychom vás rádi seznámili s některými zajímavými poznatky, které vyplynuly ze zkoumání rekordů v časových řadách denních srážkových úhrnů.

### Popis dat

V okruhu působnosti brněnské pobočky ČHMÚ existuje či existovalo více než 400 srážkoměrných stanic. Srážky se měří denně jako úhrn srážek za dobu od 7 h ráno jednoho dne do 7 h ráno druhého dne pomocí přístroje zvaného srážkoměr. Je to v podstatě nádoba se známou plochou, v níž se zachycují srážky a měří jejich objem. Ten se přepočte na výšku sloupce vody v mm, jenž by pokryl příslušnou plochu, kdyby neodtekl a nevypařil se.

---

Ladislav Budík, [budik@chmi.cz](mailto:budik@chmi.cz), Český hydrometeorologický ústav, p. Brno, Kroftova 43, 616 67 Brno – Žabovřesky

RNDr. Marie Budíková PhD, [budikova@math.muni.cz](mailto:budikova@math.muni.cz), Masarykova univerzita, přírodovědecká fakulta, katedra aplikované matematiky, Janáčkovo nám. 29a, 602 00 Brno

Na řadě stanic je pozorování prováděno již od konce 19. století. Bohužel občas docházelo k přesunům nebo rušením stanic. Některé záznamy se dokonce ztratily a řady pozorování jsou nesouvislé. Podařilo se najít 33 stanic, které nepřetržitě měří srážky od roku 1933 do současnosti (pro naše účely do roku 2002). Z každého

roku byla vybrána ta denní srážka, která dosáhla nejvyšší hodnoty. Máme tedy k dispozici 33 časových řad denních srážkových maxim v letech 1933 až 2002.

Rozmístění stanic je uvedeno v následující mapce na obr. 1.



Obr.1

### Pojem rekordu, střední hodnota a rozptyl počtu rekordů

Věnujme se nyní základům teorie rekordů [1]. Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr ze spojitého rozložení. Pro jednoduchost budeme náhodnou veličinu  $i$  její číselnou realizaci označovat tímž symbolem  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Číslo  $X_1$  se nazývá rekord. Pro  $i \geq 2$  je  $X_i$  rekord, když  $X_i \geq \max \{X_1, \dots, X_{i-1}\}$ .

Zavedeme náhodnou veličinu  $R_n$ , která udává počet rekordů v posloupnosti  $X_1, \dots, X_n$ . Je zřejmé, že  $R_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ , kde  $Y_i$

je indikátor rekordu, tj.  $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{je-li } X_i \text{ rekord} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ . Náhodná veličina  $Y_i$  má alternativní rozložení s parametrem

$$\vartheta_i = P(Y_i = 1) = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}. \text{ Její střední}$$

hodnota je  $E(Y_i) = \frac{1}{i}$  a rozptyl  $D(Y_i) =$

$$\frac{1}{i} \left( 1 - \frac{1}{i} \right), \quad i = 1, \dots, n. \text{ Nyní již snadno}$$

vypočteme střední hodnotu a rozptyl počtu rekordů:

$$E(R_n) = E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i},$$

$$D(R_n) = D\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n D(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

V našem případě máme 33 stanic s délkou sledování 70 let. V posloupnosti délky  $n = 70$  je střední hodnota počtu rekordů  $E(R_{70}) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{70} = 4,8328$  a rozptyl

$$D(R_{70}) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{70}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{70^2}\right) = 3,2021.$$

V následující tabulce máme uvedeny počty rekordů ve sledovaných 33 stanicích:

Bzenec	3	Jemnice	6	Sloup	2
Náměšť na Hané	5	Kuchařovice	2	Babice nad Svitavou	2
Morkovice	8	Džbánice	7	Židlochovice	4
Bystřice p. Host.	8	Bystřice nad Pern.	5	Rohozná	6
Dřevohostice	6	Štěpánov	5	Třebíč	5
Rusava	7	Olešnice	5	Heraldice	6
Holešov	5	Nové Město na Mor.	5	Bohdalov	5
Veliková	10	Velká Bíteš	3	Velké Meziříčí	1
Napajedla	4	Stvolová-Vlkov	4	Ždánice	6
Uherský Brod	4	Letovice	4	Valtice	4
Strážnice na Mor.	3	Blansko	3	Strání	6

Průměr počtu rekordů je 4,8181 a rozptyl 3,7784. Vidíme tedy, že empirické údaje vykazují dobrou shodu s teoretickými hodnotami.

Co se týká střední hodnoty počtu rekordů v posloupnosti délky  $n$ , uveďme pro zajímavost takové hodnoty  $n$ , pro něž tato střední hodnota poprvé překročí číslo  $N$ ,  $N = 2, 3, \dots, 10$ .

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	4	11	31	83	227	616	1674	4550	12367

Údaje v této tabulce lze interpretovat tak, že např. 11 letý člověk zažije v nějaké náhodné posloupnosti (např. v teplotní nebo srážkové řadě) v průměru 3 rekordy, 31 letý 4 rekordy a teprve 83 letý 5 rekordů.

### Pravděpodobnostní rozložení počtu rekordů

Pro  $r = 1, 2, \dots, n$  označme  $p_{r,n}$  hodnotu pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny  $R_n$  v bodě  $r$ , tj.  $p_{r,n} = P(R_n = r)$ . Pro  $r = 1$  a  $r = n$  lze pravděpodobnost  $p_{r,n}$  sta-

novit jednoduchou kombinatorickou úvahou.

Nechť  $r = 1$ . Jeden rekord znamená, že největší hodnota je  $X_1$ . Všech uspořádání veličin  $X_1, \dots, X_n$  je  $n!$  a příznivých uspořádání, tj. těch, kdy největší hodnota je na začátku, je  $(n-1)!$ . Tedy

$$p_{1,n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Nechť  $r = n$ .  $n$  rekordů znamená, že veličiny  $X_1, \dots, X_n$  jsou uspořádány vzestupně. Takové uspořádání je jenom jedno. Tedy  $p_{n,n} = \frac{1}{n!}$ .

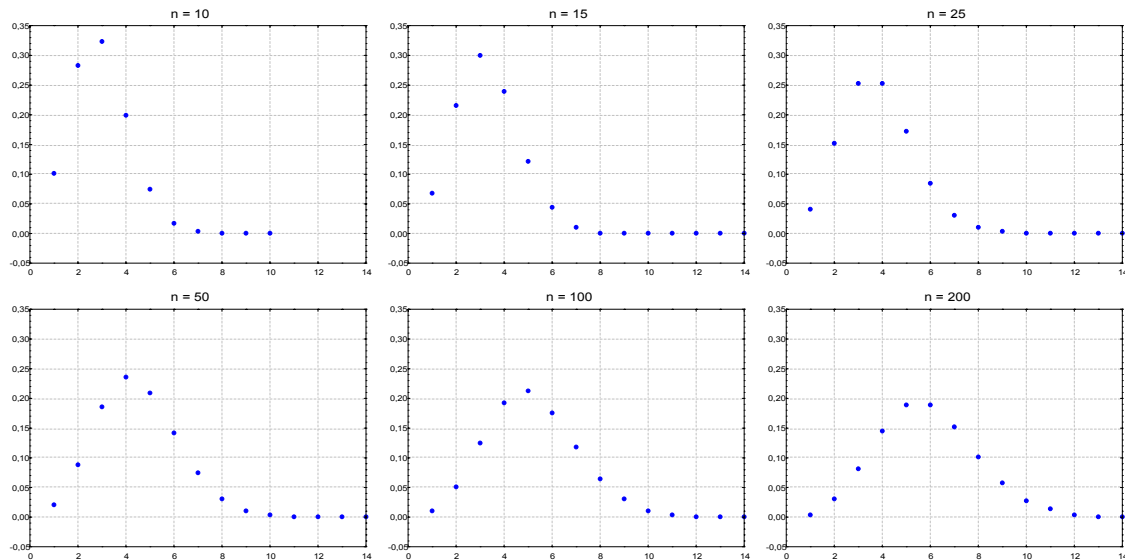
Ostatní pravděpodobnosti se vypočítají podle rekurentního vzorce:

$$p_{r,n} = p_{r,n-1} = \frac{n-1}{n} p_{r,n-1} + \frac{1}{n} p_{r-1,n-1}, \text{ který}$$

platí pro každé přirozené  $n$ ,  $r$ ,  $r \leq n$ , přičemž  $p_{1,1} = 1$  a  $p_{r,0} = 0$ . (Důkaz věty se provede pomocí věty o sčítání pravděpo-

dobností využitím elementárních vlastností pravděpodobnosti.)

Na následujících obrázcích 2 až 7 jsou znázorněny průběhy pravděpodobnostní funkce počtu rekordů pro  $n = 10, 15, 25, 50, 100$  a  $200$ .



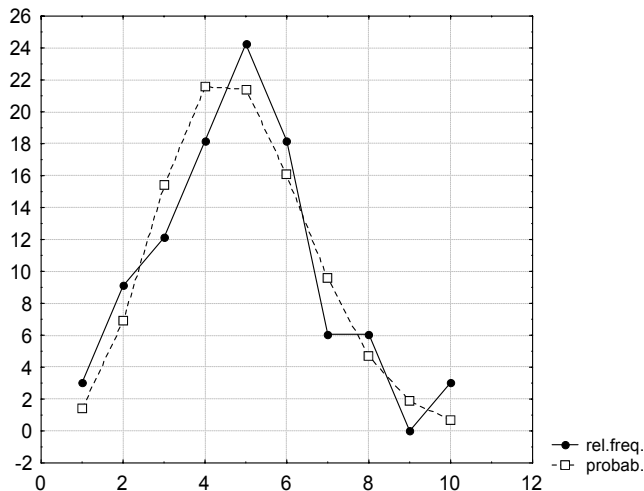
Obr.2 až 7

V našem souboru 33 stanic s délkou pozorování  $n = 70$  let odhadneme pravděpodobnostní funkci počtu rekordů pomocí relativní četnosti. V další tabulce

jsou uvedeny dosažené počty rekordů, jejich relativní četnosti (v %) a pravděpodobnosti  $p_{r,70}$  (v %).

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r.čet.	3,03	9,09	12,12	18,18	24,24	18,18	6,06	6,06	0,00	3,03
$p_{r,70}$	1,43	6,88	15,42	21,60	21,41	16,11	9,61	4,69	1,92	0,67

Průběh relativních četností a pravděpodobnostní funkce máme znázorněn graficky na obrázku č.8:

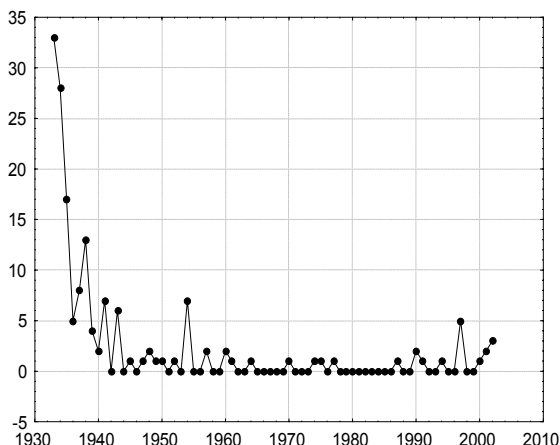


Obr.8

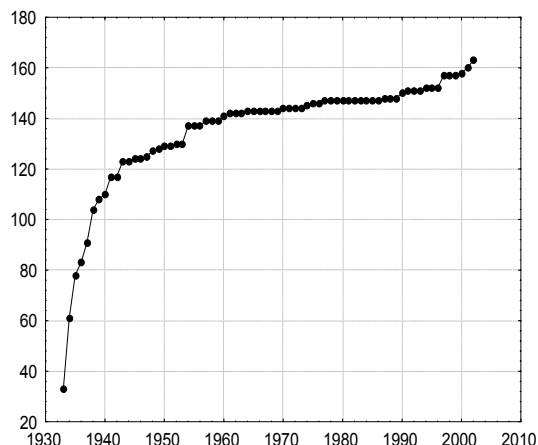
K ověření hypotézy, že pozorované relativní četnosti nejsou v rozporu s teoretickými pravděpodobnostmi, použijeme  $\chi^2$  test dobré shody. Testová statistika nabývá hodnoty 16,3323, odpoví-

dající p-hodnota je 0,0603, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě empirických a teoretických údajů.

Následující obrázky 9 a 10 ukazují závislost počtu rekordů a kumulativního počtu rekordů na čase.



obr.9



obr.10

Křivka kumulativního počtu rekordů vcelku slušně kopíruje teoretickou křivku až na mírné výkyvy. Významná změna je na konci křivky od poloviny 80. let. 2. derivace, ač by podle teorie neměla, mění znaménko a počty rekordů začínají dramaticky růst. To může i naznačovat, že vlastnosti dat nemusí zcela vyhovovat teorii rekordů.

#### Vlastnosti rekordů v klouzavých desetiletých obdobích

Výskyty rekordů v řadě délky  $n$  jsou závislé na struktuře dat, např. v případě srážkových maxim záleží na tom, zda

začátek řady spadá do suchého či vlhkého období. Abychom tento efekt poněkud eliminovali, rozhodli jsme se zkoumat počty rekordů v klouzavých desetiletých obdobích, tj. v letech 1933 – 1942, 1943 – 1952, ..., 1993 – 2002. Protože jsme nechtěli ztratit informace obsažené na konci souboru, uvažovali jsme ještě devítileté období 1994 – 2002, osmileté 1995 – 2002 atd. až jednoleté 2002.

Nejprve se budeme zabývat průměrným počtem rekordů na jednotlivých stanicích. V tabulce máme uvedeny střední hodnoty počtu rekordů v řadě délky  $n$ ,  $n = 1, \dots, 10$ :

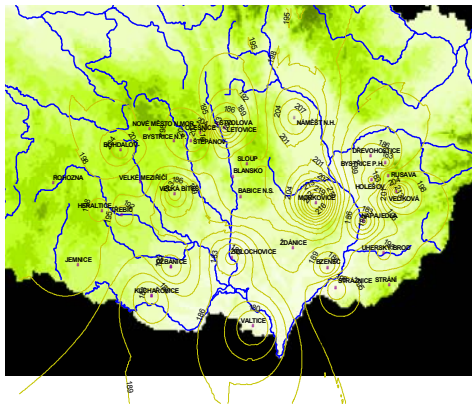
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E(R_n)$	1	1,5000	1,8333	2,0833	2,2883	2,4500	2,5929	2,7179	2,8290	2,9290

V řadě délky  $n = 70$  se vyskytuje 61 desetiletých klouzavých období, jedno devítileté atd. až jedno jednoleté. Střední hodnota počtu rekordů tedy bude

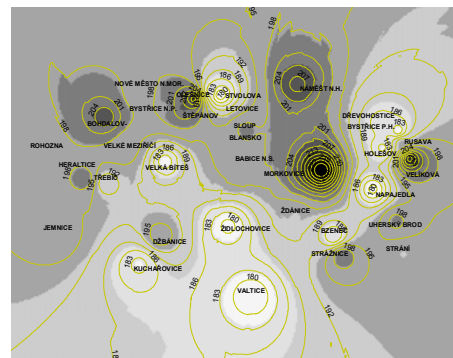
$61 \cdot 2,929 + 2,829 + \dots + 1,5 + 1 = 197,96$ .  
Situaci na jednotlivých stanicích zachycuje tabulka.

Bzenec	183	Jemnice	197	Sloup	199
Náměšť na Hané	208	Kuchařovice	182	Babice nad Svitavou	198
Morkovice	225	Džbánice	197	Židlochovice	179
Bystřice p. Host.	181	Bystřice nad Pern.	198	Rohozná	195
Dřevohostice	184	Štěpánov	204	Třebíč	190
Rusava	194	Olešnice	211	Herařtice	200
Holešov	182	Nové Město na Mor.	197	Bohdalov	206
Velkova	214	Velká Bíteš	181	Velké Meziříčí	196
Napajedla	179	Stvolová-Vlkov	184	Ždánice	193
Uherský Brod	199	Letovice	177	Valtice	177
Strážnice na Mor.	201	Blansko	196	Strání	193

Následující dvě mapy znázorňují izolinie terénu a izolinie počtu rekordů.



obr.11



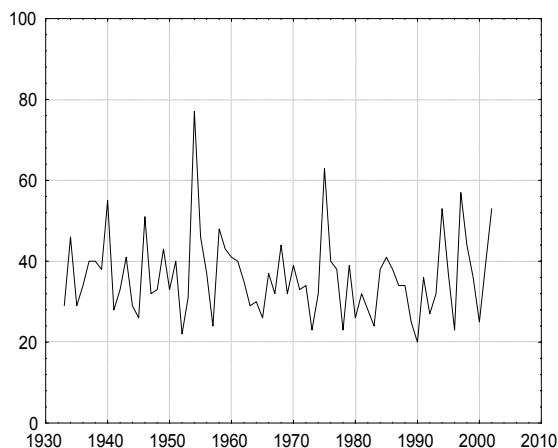
obr.12

Jsou to zajímavé mapy, ale obtížně se interpretují.

Teoretická suma klouzavých rekordů jedné řady by měla být asi 198. Kolísá ale od 177 do 225. Rozdíl mezi nejmenším a největším množstvím klouzavých rekordů v různých řadách je 48, což je čtvrtina celkového teoretického počtu rekordů. To je příliš velký rozdíl. Rozdíly v hodnotách, v nichž začínáme počítat rekordy na okrajích řady, nemohou tak velký rozdíl vykazovat ani teoreticky. To by některé řady musely začínat dlouhodobým minimem a všech prvních deset hodnot měnit jedním směrem a jiná řada

zase opačně, což není pravda. Pokud by ale řady vykazovaly jako celek lehkou „pilovitost“ průběhu jedním či druhým směrem, dalo by se snadno dosáhnout i větších rozdílů. Vysvětlením příčiny takového jevu bude obtížné, protože tento jev neodpovídá dosavadním představám. Na následujících obrázcích je vidět dva typické zástupce krajních poloh spektra sumy klouzavých rekordů. Valtice mají 177 rekordů, tj méně než 198 a Bohdalov má 206 rekordů, což je více. Porovnáním obou obrázků vidíme, že u Valtic je spíše tendence k pomalému poklesu maxim křivky a prudkému vzrůstu, u Bohdalova je to naopak.

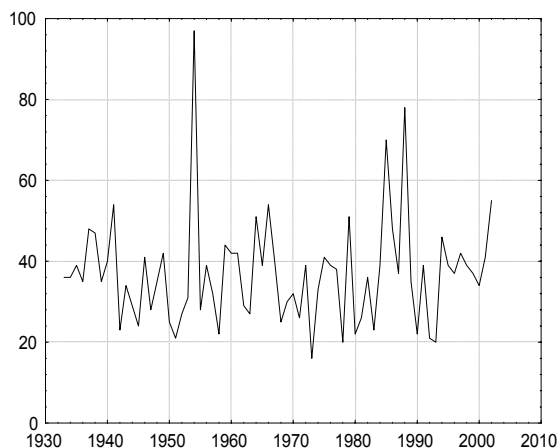
Valtice



obr.13

Přiblížit se to dá ještě klouzavými maximy s hodnotou na pravém okraji okna (nikoliv ve středu okna). Pokud počítáme index determinace v lineární regresi vyjadřující závislost počtu rekordů

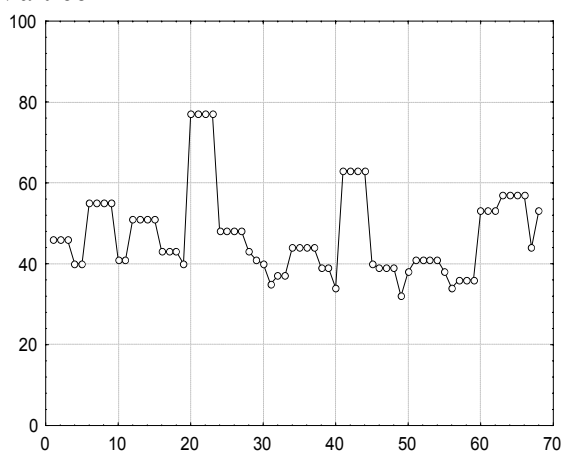
Bohdalov



obr.14

v klouzavých desetiletých oknech na klouzavých n-letých maximech (n=2,3,4,5,6), potom nejvyšší hodnotu (0,74) poskytují čtyřletá maxima.

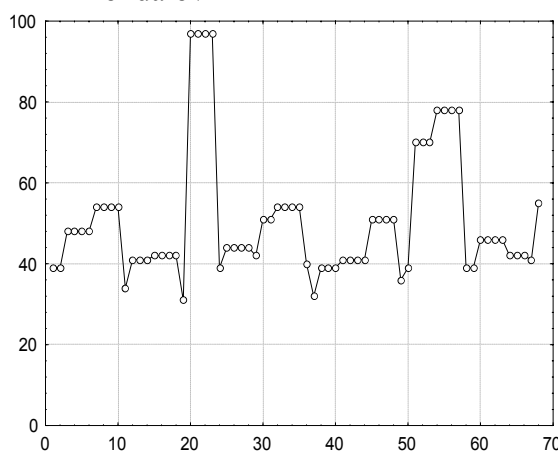
Valtice



obr.15

Znamená to tedy, že u části stanic (nižší počty rekordů, než je teoretická hodnota) po rychlém nástupu rekordní srážky dochází k poměrně pomalému kývavému poklesu maximální roční srážky. Pokud je rekordů více, než udává teorie, je nástup rekordní srážky kývavě postupný a potom dojde k prudkému poklesu. Mezi tím jsou různé přechody. Obecně rekordy

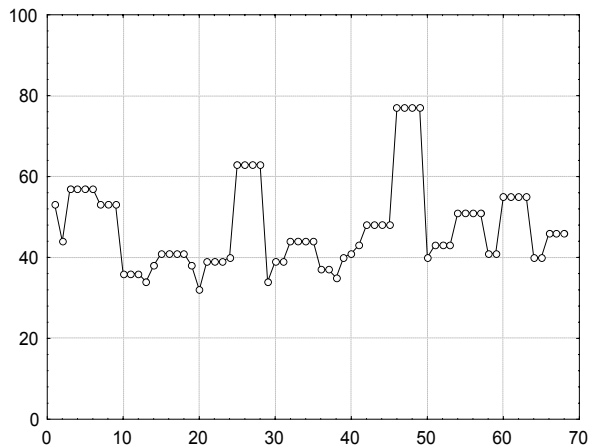
Bohdalov



obr.16

na různých stanicích nastávají v různou dobu, mohou samozřejmě nastat i ve stejnou dobu.

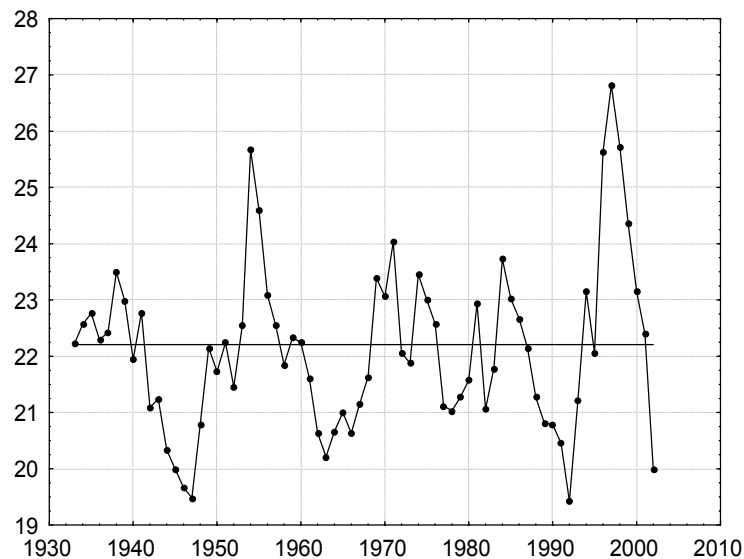
Na dalším obrázku je průběh řady čtyřletých klouzavých maxim na stanici Valtice zobrazen pozpátku. Pak je charakter průběhu velmi podobný normálnímu průběhu na stanici Bohdalov.



Obr.17

Pro řady délky  $n = 1, 2, \dots, 10$  je teoretický součet rekordů  $E(R_1) + \dots + E(R_{10}) = 22,2071$ . Průměrné počty rekordů v

klouzavých desetiletých obdobích na všech vybraných 33 stanicích zachycuje následující obrázek.



obr.18

Tato časová řada vykazuje periodický charakter. Fisherův test periodicity prokázal na 5% hladině významnosti tři periody, a to periody o délce 13,8, 2 a 11,5 roku.

### Interpretace výsledků

Z výsledku analýzy rekordů 33 řad vyplývá několik překvapivých závěrů. Prů-

běh rekordů denních maximálních srážkových úhrnů za rok ukazuje, že data v rámci jedné stanice nejsou zcela náhodná, ale hodnoty se v průběhu několika let těžko definovatelným způsobem částečně ovlivňují (viz tzv. „pilovitost“ dat). Dosud při zpracování dat používaný předpoklad říká, že roční maxima srážek i průtoků v řekách jsou navzájem nezávislá. To, zdá se, zcela neplatí.



Hodnoty počtu klouzavých desetiletých rekordů se vzájemně mezi řadami různí tak, že to nelze vysvětlit statistickými odchylkami náhodných výběrů, navíc tyto odchylky vykazují určitou vazbu na hydrologicko-pedologicko-geografické podmínky okolí jednotlivých stanic. Tyto odchylky nemohou vyplývat jednoznačně z obecného klimatu. Různí se i poměrně blízko položené řady a je tu viditelná vazba na místní podmínky. Tyto rozdíly mohou být utvářeny vztahy v místním (malém) koloběhu vody. Pak by se dala první pracovní hypotéza původu těchto rozdílů najít v následujících vztazích.

► Jestliže na daném místě v daném čase jsou srážky podstatně větší než potenciální evapotranspirace, pak denní srážková maxima narůstají až se objeví v obecném klimatu velmi suchý rok. V takovémto případě je počet klouzavých rekordů vyšší než teoretická hodnota.

► Jsou-li srážky dlouhodobě významně nižší než evapotranspirace potom zásoba vody v krajině klesá a klesají srážková maxima dotud, pokud se v obecném klimatu neobjeví velmi vlhký rok, který zvýší zásoby vody v půdách s velkými vodními kapacitami a v důsledku toho vzroste výpar a tím i srážková maxima. Ta potom v letech, kdy srážky jsou menší než potenciální evapotranspirace zase s vysýcháním krajiny klesají.

► Jestliže kapacity půd jsou velmi nízké nebo dlouhodobě je srážka zhruba stejná jako evapotranspirace je

počet klouzavých rekordů přibližně stejný jako udává teorie.

Domníváme se, že je podstatný vztah mezi kapacitou půd a srážkami a potenciální evaranspirací a srážkami. Jestliže srážky z nějakého důvodu nemohou přejít zpět do evapotranspirace, potom se realizuje model, kde počet klouzavých rekordů je zhruba roven teoretické hodnotě. Z výše řečeného vyplývá, že roční maxima denních srážek v místech s různými půdními podmínkami, potenciálním výparem a geografickými podmínkami obecně nastávají v různých letech pokud se místa významně liší alespoň v jedné z uvedených vlastností.

Data klouzavých desetiletých rekordů jsou výrazně periodická. Jsou tedy období, kdy se rekordy vyskytují častěji a období, kdy pravděpodobnost jejich výskytu je nižší. To přijatelně vysvětluje výkyvy v křivce kumulativních rekordů za 70 roků. Nicméně z toho také plyne, že časová posloupnost ročních maxim srážek přinejmenším není zcela náhodná.

### **Závěr**

Z předložených výsledků zpracování vyplývá, že řady ročních maxim denních srážkových úhrnů nejsou zřejmě zcela náhodné, ale vzájemně se ovlivňují v čase, pravděpodobně v závislosti na podmínkách výparu a podílu zachycené vody ze srážky v širším okolí pozorovacího místa.

### **Literatura**

- [1] Jiří Anděl: Matematika náhody, Matfyzpress, Praha2000.
- [2] Budíková M., Budík L.: Analysis of precipitation maxima. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica (2004) Summer School DATASTAT 03 Proceedings. (in print)